GENERALISATION DE LA TRANSFORMATION DE LORENTZ

RESUME

Soit $f=(f_1,f_2,f_3,f_4)\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}^4}$ une application qui transforme le système de coordonnées $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(ct,x,y,z)$ d'un observateur en celui ($(x'_1,x'_2,x'_3,x'_4)=(ct',x',y',z')$) d'un autre de sorte que la vitesse c soit invariante. L'ensemble de ces applications a une structure de groupe pour la loi de composition de applications. f est un difféomorphisme infiniment différentiable. f_1 est sa fonction carctéristique. Elle est solution des équations aux dérivées partielles :

$$\{\frac{\partial}{\partial x_k}(A_j)+A_jA_k\}=\{\frac{\partial}{\partial x_j}(A_k)+A_kA_j\},\quad \forall\, j,k\in\{2,3,4\}\quad,\quad ({a_{11}}^2-\sum_{i=2}^{i=4}{a_{1i}}^2)>0$$

où on a posé :

$$a_{1i}=\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\quad,\quad \mu=({a_{11}}^2-\sum_{i=2}^{i=4}{a_{1i}}^2)$$

$${}^tV_iV_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial({a_{1i}}^2+\mu)}{\partial x_j},\quad i,j\in\{2,3,4\}\quad,\quad {}^tV_iV_{ij}=\frac{\partial(a_{1i}a_{1j})}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial({a_{1i}}^2+\mu)}{\partial x_j},\quad i\neq j,\quad i,j\in\{2,3,4\}\quad,$$

$${}^tV_iV_{jk}=a_{1k}\frac{\partial(a_{1i})}{\partial x_j},\quad i\neq j\neq k,\quad i,j,k\in\{2,3,4\}\quad,\quad V^{ij}={}^t\left({}^tV_{ij}V_2\quad,\quad {}^tV_{ij}V_3\quad,\quad {}^tV_{ij}V_4\right)$$

$$D=\frac{1}{\mu}I_3-\frac{1}{\mu\,a_{11}^2}(a_{1i}a_{1j})_{i,j}\quad,\quad I_3\ \text{est la matrice identité de}\ \mathbb{R}^3\quad,\quad c^{ij}=DV^{ij}\quad,\quad A_j=\begin{pmatrix}c_2^{2j} & c_3^{2j} & c_4^{2j}\\ c_2^{3j} & c_3^{3j} & c_4^{3j}\\ c_2^{4j} & c_3^{4j} & c_4^{4j}\end{pmatrix}\quad.$$

Le système $(f_i)_i\quad i\in\{2,3,4\}$ est alors déterminé par les équations :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_i}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_i}{\partial x_4}\end{pmatrix}=A_j\begin{pmatrix}\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_i}{\partial x_3}\\ \frac{\partial f_i}{\partial x_4}\end{pmatrix}\quad,\quad a_{i1}=\sum_{k=2}^{k=4}(\frac{a_{1k}}{a_{11}})a_{ik},\quad j\in\{2,3,4\}$$

auxquelles on associe les conditions initiales :

$({}^tV_iV_i)(0,0,0,0)=(a_{1i}^2+\mu)(0,0,0,0),\quad ({}^tV_jV_i)(0,0,0,0)=a_{1i}a_{1j}(0,0,0,0),\quad i\neq j,\quad i,j\in\{2,3,4\}$

où on a posé : $V_i={}^t\left(a_{2i}\quad a_{3i}\quad a_{4i}\right)\quad,\quad i\in\{2,3,4\}$

La transformation de Lorentz est l'unique solution de ces équations lorsque le gradient de la fonction caractéristique de la transformation est un vecteur constant.
Le fait qu'on puisse multiplier ces solutions par une constante arbitraire non nulle provient du constat qu'un physicien donné définit de façon arbitraire la mesure qu'il choisie pour être l'unité de longueur. Le fait que

cette constante multiplicatrice soit de signe quelconque provient du constat q'un phycisien peut re-écrire les lois de la physique en inversant le signe des intervalles d'espace et de temps sans risquer de modifier ses prédictions. En effet, mathématiquement, l'orientation des axes est fixée de façon arbitraire. Le fait que a_{11} ne change pas de signe ($(a_{11}{}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} a_{1i}{}^2) > 0$) signifie que « l'écoulement du temps est unidirectionnel » .
La constante additive est dû aux conditions initiales (il ne s'agit évidement pas de celles mentionnées ci-dessus)

INTRODUCTION

On considère que les phénomènes physique sont des fonctions définies sur un espace qu'on nommera Univers. Les éléments de cet espace sont appelés évènements.

La transformation de Lorentz admet comme hypothèse l'invariance d'une vitesse pour deux physiciens S et S' dont le mouvement relatif est une translation uniforme. Cette transformation nous explique comment déduire, à partir des intervalles d'espace et de temps constatés entre deux événement par S , les intervalles correspondants pour S' . Je me propose de construire sur la même hypothèse une généralisation de cette transformation de sorte qu'elle soit valable entre deux physiciens dont le mouvement relatif est quelconque. Pour cela, plutôt que d'énumérer à priori les états relatifs possibles entre deux observateur (translation uniforme, translation non uniforme, rotation uniforme,...), je considère qu'ils doivent être solution de la nouvelle théorie. Ainsi, l'expression « S est en translation uniforme par rapport à S' » n'a aucun sens dans la construction de la théorie.
On suppose que S (resp. S') représente par (ct, x, y, z) (resp. (ct', x', y', z')) les coordonnées d'un événement. Dire qu'une vitesse de valeur c est invariante signifie que l'ensemble des événements constituants la trajectoire d'une entité physique ponctuelle, dont les coordonnées forment une ligne différentiable par rapport à la première variable, est commune aux deux physiciens. Pour cette entité, on a l'égalité :

$$c = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} = \frac{\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}}{dt'}$$

Si on suppose que sa trajectoire est linéaire pour S et S' , il vient la relation :

$$c(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2$$

où (ct_1, x_1, y_1, z_1) (resp. $(ct'_1, x'_1, y'_1, z'_1)$) et (ct_2, x_2, y_2, z_2) (resp. $(ct'_2, x'_2, y'_2, z'_2)$) sont les coordonnées pour S (resp. S') de deux évènements de la trajectoire de l'entité.
Dans la généralité, une trajectoire linéaire pour S ne l'est pas nécessairement pour S' mais on a toujours, le long de la trajectoire de l'entité considérée :

$$cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = cdt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$$

Il s'agit pour la nouvelle théorie de décrire les transformations $(ct, x, y, z) \rightarrow (ct', x', y', z')$ pour lesquelles cette relation est satisfaite.
On remarque que le physicien définit à priori l'unité de longueur et l'unité de durée de façon arbitraire et il ne risque pas de modifier les lois de la physique en les redéfinissant. Ainsi, S' peut définir son unité de longueur de sorte qu'elle diffère de celle de S par une constante multiplicative positive. Ainsi, la relation :

$$ct' = \lambda ct,\ x' = \lambda x,\ y' = \lambda y,\ z' = \lambda z \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

définie une transformation. Dans ce cas, la longueur d'un objet pour S (resp. S') étant L (resp. L'), on a la relation :

$$L' = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = |\lambda| \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = |\lambda| L$$

L'ensemble des transformation est donc invariant par homothétie de rapport non nul.

FORMALISME

L'univers, noté $\mathfrak{N}$, est un espace topologique homéomorphe à $\mathbb{R}^4$. On appelle « observateur » tout homéomorphisme définit sur $\mathfrak{N}$ et à valeur dans $\mathbb{R}^4$. On note Θ l'ensemble des observateurs.

Une application $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ est dite admissible si

1) f est un difféomorphisme infiniment différentiable
2) $\forall x \in \mathbb{R}^4,\ \forall h \in \mathbb{R}^4$, en notant $h' = df(x)h$, on a la relation :

$$\{(h_1)^2 - (h_2)^2 - (h_3)^2 - (h_4)^2 = 0\} \Leftrightarrow \{(h'_1)^2 - (h'_2)^2 - (h'_3)^2 - (h'_4)^2\}$$

avec $h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$ et $df(x)$ est la différentielle de f en x.

On désigne par $\mathfrak{N}$ l'ensemble des transformations admissibles.

On appelle espace-temps d'un observateur S le sous ensemble $E(S)$ de Θ définit par :

$$E(S) = \{foS,\ f \in \mathfrak{N}\}$$

$E(S)$ sera dit euclidien car on s'est servi, dans la définition d'une transformation admissible, de la norme euclidienne pour caractériser l'hypothèse fondamentale.

DEVELOPPEMENT

Soit $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ une transformation admissible et soit $A = (a_{ij})_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$ la matrice de sa différentielle dans un repère orthonormé de $\mathbb{R}^4$. Notons, $h \in \mathbb{R}^4$, $P(h) = (h_1)^2 - (h_2)^2 - (h_3)^2 - (h_4)^2$. Alors $h' = df(x)h \Leftrightarrow h' = Ah$ et donc $P(h')$ est une forme quadratique des variables (h_i). La relation $\{P(h') = 0\} \Leftrightarrow \{P(h) = 0\}$ signifie que $P(h)$ et $P(h')$, considérés comme polynômes de second degré en h_1, ont même zéros et on en déduit qu'ils sont proportionnels. Ainsi,

$$\exists \mu : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \mu(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^4,\ P(h') = \mu P(h)$$

Nous pouvons alors redéfinir $\mathfrak{N}$ ainsi :

$$\mathfrak{N} = \{f \in \mathfrak{N}^\infty / \exists \mu : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4,\ \mu(x) \neq 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^4,\ P(h') = \mu(x) P(h),\ h \in \mathbb{R}^4,\ h' = df(x)h\}$$

On remarque que $\forall f \in \mathfrak{N},\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \lambda f \in \mathfrak{N}$

DESCRIPTION DE $\mathfrak{N}$

Soit $f \in \mathfrak{N}$, $A = (a_{ij})_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$, $h \in \mathbb{R}^4$, $h' = df(x)h$.

Alors $h'_i = \sum_{j=1}^{j=4} a_{ij} h_j$, $P(h') = (a_{11}^2 - \sum_{k=2}^{k=4} a_{k1}^2) h_1^2 + \sum_{i=2}^{i=4} (a_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{k=4} a_{ki}^2) h_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} (a_{1i} a_{1j} - \sum_{k=2}^{k=4} a_{ki} a_{kj}) h_i h_j$.

On en déduit les relations :

$$a_{11}^2 - \sum_{k=2}^{k=4} a_{k1}^2 = \mu, \quad a_{1i}^2 - \sum_{k=2}^{k=4} a_{ki}^2 = -\mu, \quad a_{1i} a_{1j} - \sum_{k=2}^{k=4} a_{ki} a_{kj} = 0$$

et ce système se met sous la forme :

$$^t A A = \mu \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{12} & a_{11}a_{13} & a_{11}a_{14} \\ a_{11}a_{12} & a_{12}^2 & a_{12}a_{13} & a_{12}a_{14} \\ a_{11}a_{13} & a_{12}a_{13} & a_{13}^2 & a_{13}a_{14} \\ a_{11}a_{14} & a_{12}a_{14} & a_{13}a_{14} & a_{14}^2 \end{pmatrix}$$

on note : $^t A A = \mu J + 2(a_{1i} a_{1j})_{ij}$.

Le calcul donne, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, I_4 est la matrice identité du $\mathbb{R}^4$:

$$det(^t A A - \lambda I_4) = (\mu - \lambda)^2 \{2(\mu - \lambda) a_{11}^2 - (\mu + \lambda)(2a_{12}^2 + 2a_{13}^2 + 2a_{14}^2 + \mu - \lambda)\}$$

Posons $V_i = {}^t(a_{2i} \quad a_{3i} \quad a_{4i})$, $i \in \{1,2,3,4\}$. Alors le système $\{V_1(x), V_2(x), V_3(x), V_4(x)\}$ est nécessairement lié $\forall x \in \mathbb{R}^4$ et par suite, $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \in (\mathbb{R}^4)^{\mathbb{R}^4}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^4, \ (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x), \alpha_4(x)) \neq (0,0,0,0), \ \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i V_i = 0$$

d'où $$^t V_j \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i V_i = \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_i \, ^t V_j V_i = 0 \quad \forall j \in \{1,2,3,4\}$$

Sachant que $^t V_1 V_1 = a_{11}^2 - \mu$, $^t V_i V_i = a_{1i}^2 + \mu$, $(i \in \{2,3,4\})$, $^t V_j V_i = a_{1i} a_{1j}$, $(i \neq j, \ i, j \in \{1,2,3,4\})$, on obtient un système linéaire qui a pour déterminant :

$$\mu^3 \{a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{14}^2 - \mu\}$$

Ce déterminant devant être nul, on déduit $\mu = a_{11}^2 - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{14}^2$

L'équation à résoudre est donc :

$$^t A A = (a_{11}{}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} a_{1i}{}^2) J + 2(a_{1i} a_{1j})_{ij}$$

En tenant compte de l'expression obtenue pour μ , on a l'égalité :

$$det(^t A A - \lambda I) = (\mu - \lambda)^2 \{\lambda^2 + 2\lambda(\mu - 2a_{11}^2) + \mu^2\}$$

On peut en déduire les valeurs propres de $^t A A$:

$$\lambda_1 = \mu, \quad \lambda_2 = (2a_{11}{}^2 - \mu) - 2 \ |a_{11}| \sqrt{a_{11}{}^2 - \mu}, \quad \lambda_3 = (2a_{11}{}^2 - \mu) + 2 \ |a_{11}| \sqrt{a_{11}{}^2 - \mu},$$

Soit $V(\lambda_1)$ le sous espace propres associé à λ_1 . Alors,

$\forall e \in V(\lambda_1), \ \| Ae \|^2 = {}^t e(^t A A) e = \mu(^t e e) = \mu \| e \|^2$ d'où $\mu > 0$ et par suite $a_{11}(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^4$

Ainsi, le signe de a_{11} est quelconque et surtout il est constant : en effet, un physicien peut inverser les signe des intervalle d'espace et de temps dans toutes ses formules sans risquer de modifier ses prédictions puisque mathématiquement, les axes sont orientés de façon arbitraire. Le fait que le signe de a_{11} soit constant assure l'unicité du sens de « l'écoulement du temps ».

Les sous espace propres associés aux valeurs ci dessus sont :

$$V(\lambda_1) = \langle 0, a_{12}, a_{13}, a_{14} \rangle^{¿ \perp ¿}$$

$$V(\lambda_2) = \langle \sqrt{a_{11}{}^2 - \mu}, \ -\epsilon a_{12}, \ -\epsilon a_{13}, \ -\epsilon a_{14} \rangle$$

$$V(\lambda_2) = \langle \sqrt{a_{11}{}^2 - \mu}, \ \epsilon a_{12}, \ \epsilon a_{13}, \ \epsilon a_{14} \rangle, \quad \epsilon = \frac{a_{11}}{|a_{11}|}$$

On a la relation $det({}^tA\,A)=det(A)^2=\mu^4$ et donc $det(A)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^4$. Les transformation admissibles sont donc des bijections et de la caractérisation :

$$\mathfrak{N}=\{\, f\in\mathfrak{N}^{\infty}/\exists\,\mu:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4,\ \mu(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^4,\ P(h')=\mu(x)P(h),\ h\in\mathbb{R}^4,\ h'=df(x)h\}$$

il apparaît que $\mathfrak{N}$, muni de la composition des applications, a une structure de groupe. De plus,

$$S'\in E(S)\Leftrightarrow S\in E(S')\Leftrightarrow E(S)=E(S')$$

On peut donc partitionner Θ en sous espaces qu'on appellera espace-temps de sorte que deux observateurs S et S' appartiennent au même espace-temps si et seulement si $E(S)=E(S')$.

$A=(a_{ij})_{ij}$ est la matrice de la différentielle d'une transformation admissible si et seulement si :

$${}^tA\,A=(a_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}a_{1i}{}^2)\,J+2(a_{1i}a_{1j})_{ij} \quad \text{avec} \quad (a_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}a_{1i}{}^2)>0$$

Soit $F=(a_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}a_{1i}{}^2)\,J+2(a_{1i}a_{1j})_{ij}$ et $G=(b_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}b_{1i}{}^2)\,J+2(b_{1i}b_{1j})_{ij}$. Si on suppose $F=G$, on peut en déduire

$$F(1,1)-\sum_{k=2}^{k=4}F(k,k)=G(1,1)-\sum_{k=2}^{k=4}G(k,k) \quad \text{ce qui s'écrit :}$$

$$(a_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}a_{1i}{}^2)=(b_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}b_{1i}{}^2) \ .$$

On a donc la relation $(a_{1i}a_{1j})_{ij}=(b_{1i}b_{1j})_{ij}$ et, puisque $a_{11}(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^4$, on obtient les égalités :

$$a_{1i}=b_{1i}, \quad \forall i\in\mathbb{R}^4$$

Définition :

f_1 est appelé fonction caractéristique de la transformation admissible f .

Définition:

On dira q'une transformation admissible f est interne lorsque, A étant la matrice de sa différentielle, on a la relation : $\exists\,\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ {}^tA\,A=\lambda I$

Il est clair que si f est interne, f^{-1} l'est également et nous pouvons définir sur un espace-temps la relation d'équivalence ~ :

$$(S\sim S')\Leftrightarrow(S'\,o\,S^{-1}\,est\,interne)$$

Les classes d'équivalence sont appelées référentiels. On définit de façon analogue sur $\mathfrak{N}$ une relation d'équivalence qu'on notera également ~ :

$$(f\sim g)\Leftrightarrow(f o\,g^{-1}\,est\,interne)$$

Reprenons la résolution de système ${}^tA\,A=\mu\,J+2(a_{1i}a_{1j})_{ij}$. Il se récrit sous la forme :

$${}^tV_1V_1=a_{11}^2-\mu,\ {}^tV_iV_i=a_{1i}^2+\mu,\ \ (i\in\{2,3,4\}),\ \ {}^tV_jV_i=a_{1i}a_{1j},\ \ (i\neq j,\ \ i,j\in\{1,2,3,4\})$$

Soit $(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)\in(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$ tel que $\sum_{i=2}^{i=4}\alpha_iV_i=0$. Le système obtenu par les égalités :

$${}^tV_j\sum_{i=2}^{i=4}\alpha_iV_i=\sum_{i=2}^{i=4}\alpha_i\,{}^tV_jV_i=0 \quad \forall\, j\in\{2,3,4\}$$

a pour déterminant $\mu^2a_{11}{}^2$ (qui est non nul en tout point) et par suite $(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)$ est uniquement déterminé. On en déduit que le système $\{V_2(x),\ V_3(x),\ V_4(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ($\forall x\in\mathbb{R}^4$).

On peut alors chercher $(\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)\in(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$ tel que $V_1=\sum_{i=2}^{i=4}\alpha_i V_i$ et on trouve $V_1=\sum_{i=2}^{i=4}\frac{a_{1i}}{a_{11}}V_i$.

Soit le système :

$$ {}^tV_iV_i=a_{1i}^2+\mu,\quad {}^tV_jV_i=a_{1i}a_{1j},\quad i\neq j,\qquad i,j\in\{2,3,4\} $$

En notant $V_{ij}=V_{ji}=\frac{\partial V_i}{\partial x_j}=\{\frac{\partial a_{2i}}{\partial x_j},\ \frac{\partial a_{3i}}{\partial x_j},\ \frac{\partial a_{4i}}{\partial x_j}\}$, et sachant que $\frac{\partial({}^tV_iV_j)}{\partial x_k}={}^tV_iV_{jk}+{}^tV_jV_{ik}$, on a :

1) $$\{{}^tV_iV_i=a_{1i}^2+\mu\}\ \Rightarrow\ {}^tV_iV_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial({a_{1i}}^2+\mu)}{\partial x_j},\quad i,j\in\{2,3,4\}$$

2) $$\{{}^tV_iV_j=a_{1i}a_{1j}\}\ \Rightarrow\ {}^tV_iV_{ij}=\frac{\partial(a_{1i}a_{1j})}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\frac{\partial({a_{1i}}^2+\mu)}{\partial x_j},\quad i\neq j,\quad i,j\in\{2,3,4\}$$

3) $$\{{}^tV_iV_j=a_{1i}a_{1j}\}\ \Rightarrow\ {}^tV_iV_{jk}=a_{1k}\frac{\partial(a_{1i})}{\partial x_j},\qquad i\neq j\neq k,\quad i,j,k\in\{2,3,4\}$$

On obtient le 3) après résolution du système linéaire de trois équations à trois inconnus :

$$\frac{\partial(a_{1i}a_{1j})}{\partial x_k}={}^tV_iV_{jk}+{}^tV_jV_{ik},\quad i\neq j\neq k,\quad i,j,k\in\{2,3,4\}$$

$\forall\, i,j\in\{2,3,4\}$, on peut chercher $c^{ij}=(c_2^{ij},\ c_3^{ij},\ c_4^{ij})^t\in(\mathbb{R}^3)^{\mathbb{R}^4}$ vérifiant $V_{ij}=\sum_{k=2}^{k=4}c_k^{ij}V_k$. En posant $V^{ij}={}^t\left({}^tV_{ij}V_2\quad {}^tV_{ij}V_3\quad {}^tV_{ij}V_4\right)$, on obtient $c^{ij}=DV^{ij}$ avec $D=\frac{1}{\mu}I_3-\frac{1}{\mu\,a_{11}^2}(a_{1i}a_{1j})_{i,j}$ où I_3 est la matrice identité de $\mathbb{R}^3$. Des relation 1),2) et 3) ci dessus, on déduit que l'unique inconnu de V^{ij} est la fonction caractéristique de la transformation recherchée et par conséquent il en est de même pour c^{ij} .

De la relation $V_{ij}=\sum_{k=2}^{k=4}c_k^{ij}V_k$, sachant que $V_{ij}=(\frac{\partial a_{2i}}{\partial x_j},\quad \frac{\partial a_{3i}}{\partial x_j},\quad \frac{\partial a_{4i}}{\partial x_j})^t$, on obtient pour chaque coordonnée : $\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}=\sum_{p=2}^{p=4}c_p^{ij}a_{kp},\quad \forall\, i,j,k,p\in\{2,3,4\}$. On peut mettre ces équations sous la forme :

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial a_{i2}}{\partial x_j}\\ \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_j}\\ \frac{\partial a_{i4}}{\partial x_j}\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix}a_{i2}\\ a_{i3}\\ a_{i4}\end{pmatrix}=A_j\begin{pmatrix}a_{i2}\\ a_{i3}\\ a_{i4}\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad A_j=\begin{pmatrix}c_2^{2j} & c_3^{2j} & c_4^{2j}\\ c_2^{3j} & c_3^{3j} & c_4^{3j}\\ c_2^{4j} & c_3^{4j} & c_4^{4j}\end{pmatrix}\quad,\quad \forall\, j\in\{2,3,4\}$$

De l'égalité :

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\begin{pmatrix}a_{i2}\\ a_{i3}\\ a_{i4}\end{pmatrix}=\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}\begin{pmatrix}a_{i2}\\ a_{i3}\\ a_{i4}\end{pmatrix}$$

on déduit que le système ci dessus est intégrable sous la condition, $i,j,k\in\{2,3,4\},\ j\neq k,$:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\{A_j\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}\}=\{\frac{\partial}{\partial x_k}(A_j)+A_jA_k\}\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial x_j}\{A_k\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}\}=\{\frac{\partial}{\partial x_j}(A_k)+A_kA_j\}\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}$$

Posons $U_i=\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}$. Alors la matrice carrée d'ordre trois ayant pour vecteurs colonnes U_2,U_3,U_4 est la transposée de de celle ayant pour vecteurs colonnes V_2,V_3,V_4 . Or nous savons que le système $\{V_2(x),\ V_3(x),\ V_4(x)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ($\forall x\in\mathbb{R}^4$) et donc il en est de même pour $\{U_2(x),\ U_3(x),\ U_4(x)\}$. Par conséquent, on peut déduire des égalités ci dessus :

$$\{\frac{\partial}{\partial x_k}(A_j)+A_jA_k\}=\{\frac{\partial}{\partial x_j}(A_k)+A_kA_j\},\quad \forall\, j,k\in\{2,3,4\}$$

Ce sont les équations de compatibilité. L'unique inconnue dans ces équations est la fonction caractéristique f_1 de la transformation recherchée. Si on suppose ce système résolu et donc que la fonction caractéristique est connue, alors $\forall i\in\{2,3,4\}$, ∇f_i est déterminé par les équations :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}=A_j\begin{pmatrix}a_{i2}\\a_{i3}\\a_{i4}\end{pmatrix}\quad,\quad a_{i1}=\sum_{k=2}^{k=4}(\frac{a_{1k}}{a_{11}})a_{ik},\qquad j\in\{2,3,4\}$$

auquelles on associe les conditions initiales :

$$({}^tV_iV_i)(0,0,0,0)=(a_{1i}^2+\mu)(0,0,0,0),\quad ({}^tV_jV_i)(0,0,0,0)=a_{1i}a_{1j}(0,0,0,0),\quad i\neq j,\qquad i,j\in\{2,3,4\}$$

DESCRIPTION DES TRANSFORMATIONS INTERNES :

Si f , dont la différentielle a pour matrice A , est une transformation interne, on a :

1) $${}^tA\,A=(a_{11}{}^2-\sum_{i=2}^{i=4}a_{1i}{}^2)J+2(a_{1i}a_{1j})_{ij}$$

2) $$\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\ {}^tA\,A=\lambda I$$

Il en résulte $a_{1i}(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^4$, $\forall i\in\{2,3,4\}$, $a_{11}{}^2=\lambda$. On déduit des équations obtenues dans le cas général les égalités : $a_{i1}=0$ $\forall i\in\{2,3,4\}$, $A_j=0$ $\forall j\in 2,3,4$. Ainsi, $\forall i\in\{2,3,4\}$, V_i est un vecteur constant et est déterminé par les conditions aux limites : ${}^tV_iV_i=\lambda$, ${}^tV_jV_i=0$, $i\neq j$. On sait alors que la matrice ayant pour vecteurs colonnes $\{V_2,\ V_3,\ V_4\}$ est de la forme $\sqrt{\lambda}B$ où B est une matrice orthogonale d'ordre 3 (${}^tBB=I_3$). En conclusion,

$$A=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda}&0\\0&\sqrt{\lambda}B\end{pmatrix}\quad,\quad {}^tBB=I_3$$

On constate alors que $f=u+v$ où $u\,et\,v$ sont deux endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ vérifiant :

$$ker(u)=Im.(v),\quad ker(v)=Im.(u)$$

$\mathbb{R}^4=ker(u)\oplus Im.(u)=ker(v)\oplus Im.(v)$ et on dira que $Im.(u)$, de dimension 1, est le sous espace temporel et $Im.(v)$, de dimension 3, est le sous espace spatial.

Nous avons montré que dans un référentiel, l'espace et le temps sont deux sous espace supplémentaires stables par les transformations admissibles (il n'y a pas corrélation) d'où le caractère absolu de la variable temporelle.

SOLUTIONS PARTICULIERES : TRANSFORMATION DE LORENTZ

Nous allons décrire les transformations admissibles pour lesquelles le gradient de la fonction caractéristique est une vecteur constant.
Soit f une transformation admissible dont le gradient de la fonction caractéristique est un vecteur constant.
Soit A la matrice de sa différentielle.

Alors $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ est une vecteur constant vérifiant $\mu = {a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2 > 0$. Il résulte des équations du cas général que $A_j = 0 \quad \forall\, j \in 2,3,4$ et par conséquent, sachant que que $a_{i1} = \sum_{k=2}^{k=4} (\frac{a_{1k}}{a_{11}})\, a_{ik}$ $\forall\, i \in \{2,3,4\}$, on peut déduire que le matrice A est à coefficients constants.
On peut écrire que h étant une transformation admissible dont la fonction caractéristique a le même vecteur gradient que f , si H est la matrice de sa différentielle, elle est à coefficients constants et on a l'égalité :

$$ {}^tA\,A = ({a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2)\, J + 2\,(a_{1i}\, a_{1j})_{ij} = {}^tH\,H $$

Il résulte : ${}^t(A\,H^{-1})\,A\,H^{-1} = {}^tH^{-1}({}^tA\,A)\,H^{-1} = {}^tH^{-1}({}^tH\,H)\,H^{-1} = I_4$. Ainsi, $f o h^{-1}$ est une transformation interne et donc, $\exists \lambda > 0$, $\exists\, B$ matrice scalaire orthogonale d'ordre trois, tels que

$$ A\,H^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda\, B \end{pmatrix} $$

Nous savons que f est entièrement déterminé par le système :

$$ {}^tV_i\,V_i = a_{1i}^2 + \mu, \quad {}^tV_j\,V_i = a_{1i}\,a_{1j}, \quad a_{i1} = \sum_{k=2}^{k=4} (\frac{a_{1k}}{a_{11}})\, a_{ik}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{2,3,4\}, ({a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2) > 0 $$

On construit alors la solution :

$$ a_{ii} = a_{11}^2 - \frac{(\sum_{k=2}^{k=3} a_{1k}^2) - a_{1i}^2}{a_{11}^2 + \sqrt{{a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2}}, \quad a_{ij} = \frac{a_{1i}\,a_{1j}}{a_{11} + \sqrt{{a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2}}, \quad a_{1i} = a_{i1}, \quad i \neq j, \quad i, j \in \{2,3,4\}, $$

Effectuons un changement de variables :

En posant : $\alpha = \frac{a_{11}}{|a_{11}|} \sqrt{{a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2}, \quad \beta_i = \frac{a_{1i}}{a_{11}}, \quad i \in \{2,3,4\}, \quad \beta^2 = \sum_{k=2}^{k=4} \beta_i^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, il vient :

$$ a_{11} = \alpha\,\gamma \quad , \quad a_{1i} = a_{i1} = \alpha\,\gamma\,\beta_i \quad , \quad a_{ii} = \alpha\,\gamma - \alpha\,\frac{\gamma^2}{1+\gamma}(\beta^2 - \beta_i^2) \quad , \quad a_{ij} = \alpha\,\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\,\beta_i\,\beta_j $$

On conclut que f étant une transformation admissible dont le gradient de la fonction caractéristique est contant et vaut $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$, avec (${a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2$), la matrice de sa différentielle est à coefficients constants et $\exists\, B$ matrice orthogonale d'ordre 3 telle que :

$$A = \alpha\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \beta_2 & 1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}(\beta^2 - \beta_2^2) & \frac{\gamma}{1+\gamma}\beta_2\beta_3 & \frac{\gamma}{1+\gamma}\beta_2\beta_4 \\ \beta_3 & \frac{\gamma}{1+\gamma}\beta_3\beta_2 & 1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}(\beta^2 - \beta_3^2) & \frac{\gamma}{1+\gamma}\beta_3\beta_4 \\ \beta_4 & \frac{\gamma}{1+\gamma}\beta_4\beta_2 & \frac{\gamma}{1+\gamma}\beta_4\beta_3 & 1 - \frac{\gamma}{1+\gamma}(\beta^2 - \beta_4^2) \end{pmatrix}$$

où on a posé : $\alpha = \frac{a_{11}}{|a_{11}|}\sqrt{{a_{11}}^2 - \sum_{i=2}^{i=4} {a_{1i}}^2}$, $\alpha\gamma(1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$

C'est la transformation de Lorentz dans laquelle on prend en considération la valeur arbitraire de la mesure prise pour unité de longueur ($|\alpha|$), et l'orientation arbitraire des axes des coordonnées spatiales et temporelles (le signe de α). On constate que cette transformation est entièrement déterminé par la donnée d'un vecteur $(\beta_2, \beta_3, \beta_4) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $1 - (\sum_{k=2}^{k=4} \beta_i^2) > 0$. Si S et S' sont deux observateurs tels que $S' = foS$, on dira que « S est en translation uniforme de de vecteur vitesse $\gamma(\beta_2, \beta_3, \beta_4)$ par rapport à S' » où on a posé $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta^2 = \sum_{k=2}^{k=4} \beta_i^2$.